217

$b_3 = [1]$ ise $[u_1, u_2]$ ve $[b_1, b_2, b_3]$ sıralı bazlarına göre L'nin matris temsilini bul.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

218

Benzerlik

n-boyutlu bir vektör uzayı V'den V'ye giden bir L lineer dönüşümünün matris temsili, sıralı bazların değişimine göre farklı $n \times n$ tipindeki matrislerdir. Şimdi bu matrisler arasındaki bağıntıyı araştıralım.

Örk: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1+x_2 \end{bmatrix}$ olsun.

$L(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $L(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olduğundan $[e_1, e_2]$ doğal baza göre L'nin matris temsili (gösterimi) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

$L(x) = A \cdot X$. $\mathbb{R}^2$'deki farklı bir sıralı baza göre L'nin matris temsili değişecektir. Örneğin $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $[u_1, u_2]$ sıralı bazına göre L'nin matris temsilini bulalım.

$$\begin{cases} L(u_1) = s_{11} u_1 + s_{21} u_2 \\ L(u_2) = s_{12} u_1 + s_{22} u_2 \end{cases} \quad B = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

$$L(u_1) = A \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$L(u_2) = A \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$[e_1, e_2]$ sıralı bazından $[u_1, u_2]$ sıralı bazına geçiş matrisini bulmamız gerekir. Bunun için $[u_1, u_2]$ bazından $[e_1, e_2]$ bazına geçiş matrisini buluruz. Bunun tersi istediğimiz geçiş matrisidir.

$$\mathcal{U}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}=(u_1,u_2)$$

$[e_1,e_2]$ bazından $[u_1,u_2]$ bazına geçiş matrisi $\mathcal{U}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 1/6\\ 2/3 & 1/6\end{bmatrix}$ dır.

$L(u_1)$'in ve $L(u_2)$'nin $[u_1,u_2]$ bazına göre koordinat vektörleri

$$[L(u_1)]_{[u_1,u_2]}=\mathcal{U}^{-1}L(u_1)=\mathcal{U}^{-1}.A.u_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 1/6\\ 2/3 & 1/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7/6\\ -5/6\end{bmatrix}$$

$$[L(u_2)]_{[u_1,u_2]}=\mathcal{U}^{-1}L(u_2)=\mathcal{U}^{-1}Au_2=\begin{bmatrix}-1/6\\ 11/6\end{bmatrix}$$

$$L(u_1)=\frac{7}{6}u_1+\left(-\frac{5}{6}\right)u_2$$

$$L(u_2)=\left(-\frac{1}{6}\right)u_1+\left(\frac{11}{6}\right)u_2$$

$$B=\begin{bmatrix}7/6 & -1/6\\ -5/6 & 11/6\end{bmatrix}$$

A ile B arasındaki bağıntı nedir?

$$B=(\mathcal{U}^{-1}Au_1,\ \mathcal{U}^{-1}Au_2)=\mathcal{U}^{-1}.A\,(u_1,u_2)=\mathcal{U}^{-1}A\,\mathcal{U}$$

$$B=\mathcal{U}^{-1}A\,\mathcal{U}$$

Teorem: $E=[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ ve $F=[w_1, w_2, \ldots, w_n]$ verilen bir vektör uzayının iki sıralı bazı, $L: V \to V$ bir lineer dönüşüm ve S, F'den E'ye geçiş matrisi olsun. A, E bazına göre L'nin matris temsili ve B, F bazına göre L'nin matris temsili ise

$$B = S^{-1}AS$$

dır.

Tanım: A ve B, $n \times n$ tipinde matrisler olsun. $B=S^{-1}AS$ olacak şekilde singüler olmayan bir S matrisi varsa B'ye A'ya <u>benzerdir</u> denir.

B, A'ya benzer ise $A=(S^{-1})^{-1}BS^{-1}$ olduğundan A'da B'ye benzerdir. Kısaca A ve B'ye benzer matrisler denir.

Yukardaki teoreme göre $n \times n$ tipindeki A ve B, aynı lineer dönüşümün matris temsilleri ise A ve B benzerdir. Tersine L'nin $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$

sıralı bazına göre matris temsili A ve singüler olmayan bir S matrisi için $B = S^{-1}AS$ olsun.

Eğer

$$w_1 = s_{11}v_1 + s_{21}v_2 + \cdots + s_{n1}v_n$$
$$w_2 = s_{12}v_1 + s_{22}v_2 + \cdots + s_{n2}v_n$$
$$\vdots$$
$$w_n = s_{1n}v_1 + s_{2n}v_2 + \cdots + s_{nn}v_n$$

ise $[w_1, w_2, \ldots, w_n]$, V'nin bir sıralı bazı ve B, $[w_1, w_2, \ldots, w_n]$ bazına göre L'nin matris temsilidir.

Örk. 1) D, P_3 üzerinde türev operatörü olsun. ($D: P_3 \to P_3$) $[x^2, x, 1]$ bazına göre A ve $[1, 2x, 4x^2-2]$ bazına göre D'nin B temsil matrisini bulunuz.

$$D(x^2) = 2x = 0.x^2 + 2.x + 0.1$$
$$D(x) = 1 = 0.x^2 + 0.x + 1.1$$
$$D(1) = 0 = 0.x^2 + 0.x + 0.1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

$$D(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot(2x) + 0\cdot(4x^2-2)$$
$$D(2x) = 2 = 2\cdot 1 + 0\cdot 2x + 0\,(4x^2-2)$$
$$D(4x^2-2) = 8x = 0\cdot 1 + 4\cdot(2x) + 0\cdot(4x^2-2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[1, 2x, 4x^2-2]$ bazından $[x^2, x, 1]$ bazına geçiş matrisi

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$B = S^{-1}AS$ dir.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer operatörü $L(x) = Ax$ olsun. $[e_1, e_2, e_3]$ bazına göre L'nin matris temsili A'dır.

$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $[y_1, y_2, y_3]$ sıralı bazına göre L'nin matris temsili bul?

229

$$L(y_1) = Ay_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$L(y_1) = Ay_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L(y_2) = Ay_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-7) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L(y_3) = Ay_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 7 & 4 \\ -1/2 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

230

$[y_1, y_2, y_3]$'den $[e_1, e_2, e_3]$ geçiş matrisi

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1}$$

$$B = S^{-1} A S$$

231

5. ÖZDEĞERLER

Özdeğerler ve özvektörler:

Tanım: A, $n\times n$ tipinde bir matris olsun. $Ax=\lambda x$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir x vektörü varsa λ skalerine A'nın <u>özdeğeri</u> veya <u>karakteristik değeri</u> denir. x vektörüne de λ'ya karşı gelen <u>özvektör</u> denir. (veya λ'ya ait özvektör denir)

232

Örk: $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $x=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ olsun.

$$Ax=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax=3x$$

λ A'nın özdeğeri ve x'de λ'ya karşı gelen özvektör ise αx'de λ'ya karşı gelen özvektördür.

$$Ax=\lambda x$$

$$A(\underline{\alpha x})=\cancel{\alpha}\,\alpha Ax=\alpha(\lambda x)=\lambda\underline{(\alpha x)}$$

233

$Ax=\lambda x$ denklemi

$$(Ax-\lambda x)=0 \Rightarrow (A-\lambda I)x=0 \quad (*)$$

formunda yazılabilir. λ'nın A'nın özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $(*)$ denkleminin aşikar olmayan çözüme sahip olmasıdır. $(*)$ denkleminin çözüm kümesi $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı $N(A-\lambda I)$dır. Dolayısıyla λ, A'nın özdeğeri ise $N(A-\lambda I)\neq\{0\}$ ve $N(A-\lambda I)$ daki herhangi sıfırdan farklı bir vektör, λ'ya karşı gelen bir özvektördür. $N(A-\lambda I)$ alt uzayına λ'ya karşı gelen _özuzay_ denir.

234

$(*)$ denkleminin aşikar olmayan çözümünün olması için gerek ve yeter şart $A-\lambda I$'nın singüler olması, yani $\det(A-\lambda I)=0$ olmasıdır.

Eğer $A-\lambda I$ matrisinin determinantını açarsak λ değişken olmak üzere n. dereceden bir polinom elde ederiz. $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$

Bu polinoma _karakteristik polinom_, $\det(A-\lambda I)=0$ da A'nın _karakteristik denklemi_ denir.

karakteristik polinomun kökleri, A'nın özdeğerleridir. karakteristik polinom n-tane köke sahiptir. Bunlar katlı veya karmaşık (kompleks) sayı olabilir

Teorem! A, nxn tipinde bir matris ve λ bir skalar olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir

(a) λ, A'nın özdeğeridir

(b) $(A-\lambda I)x=0$ aşikar olmayan çözüme sahiptir.

(c) $N(A-\lambda I)\neq\{0\}$

(d) $A-\lambda I$ singüler

(e) $\det(A-\lambda I)=0$ dır.

Örk: 1) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri bulunuz.

A'nın karakteris denklemi

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-4\lambda-5=0$$

A'nın özdeğerleri $\lambda_1=-1$, $\lambda=5$ dir. $\lambda_1=-1$'e karşı gelen özvektörü bulmak için $A-(-1)I=A+I$'nın sıfır uzayı $N(A+I)$'yı bulmamız gerekir.

$(A+I)x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x=\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$N(A+I)=\left\{a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} : a\in\mathbb{R}\right\}$

$\lambda_1=-1$'e karşı gelen bir özvektör $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dır.

$\lambda_2=5 \quad (A-5I)x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$4x_1-2x_2=0$
$x_2=\alpha$
$x_1=\frac{1}{2}\alpha$

$N(A-5I)=\left\{\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} : \alpha\in\mathbb{R}\right\}$

$\lambda_2=5$'e karşı gelen bir özvektör $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dir.

2) $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulun.

$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2$

$\lambda_1=0$ ve $\lambda_2=\lambda_3=1$ özdeğerler.

$\lambda_1=0 \quad Ax=0 \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$N(A)=\left\{a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : a\in\mathbb{R}\right\}$

$x=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dir.

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad [A - \lambda I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$

$x_3 = \alpha$

$x_2 = \beta$

$x_1 = 3\beta - \alpha$

$$N(A - \lambda I) = \left\{ \begin{bmatrix} 3\beta - \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ özvektörlerdir